

23. Одномерное волновое уравнение

23.1. Уравнение струны

Струной называют упругую нить, натянутую и закрепленную за два конца. Натягивание струны означает, что на каждую ее точку действует две силы, равные по величине (обозначим ее за T), но противоположные по направлению, называемые **силами натяжения**. Эти силы уравнивают друг друга, и в результате струна находится в покое.

Приложим теперь к струне силу величины F в точке x (см. рис 23.1). Струна примет треугольную форму. Теперь силы натяжения не уравнивают друг друга, их равнодействующая противостоит внешнему воздействию F . Запишем теперь условие равновесия (для вертикальных проекций сил) $-T \sin \alpha - T \sin \beta + F = 0$.

Если форму струны слева обозначить через $y_-(x)$, а справа через $y_+(x)$, то учитывая, что $tg\beta = y'_-$, $tg\alpha = y'_+$, получаем:

$$T \left(\frac{y'_+}{\sqrt{1+(y'_+)^2}} - \frac{y'_-}{\sqrt{1+(y'_-)^2}} \right) + F = 0.$$

Рассмотрим теперь случай распределенной нагрузки. В принципе этот случай совершенно аналогичен предыдущему: если взять промежуток $[x, x + \Delta x]$, то условие равновесия силы натяжения приложенной к левому концу этого промежутка, силы натяжения приложенная к правому концу и внешняя сила F имеет вид:

$$T \left(\frac{y'(x + \Delta x)}{\sqrt{1+(y'(x + \Delta x))^2}} - \frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \right) + F_{[x, x+\Delta x]} = 0.$$

Деля на Δx , и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$T \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)' + f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — линейная плотность силы. Обычно, когда имеют дело с реальной струной, считают деформации малыми, соответственно $\sqrt{1+y'^2}$ заменяют на 1, и получают **линейное уравнение струны** $-y'' = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

Если теперь струна находится не в равновесии, а в движении, то сумма сил не равна нулю, а производит ускорение в соответствии со вторым законом Ньютона. Чтобы записать этот закон, нам понадобится вместо функции $y(x)$ рассмотреть функцию двух переменных $u(t, x)$ (при каждом t это формула струны в момент времени t), тогда сила действующая на точку x в момент t равна

$$T \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \right)_x + f(t, x),$$

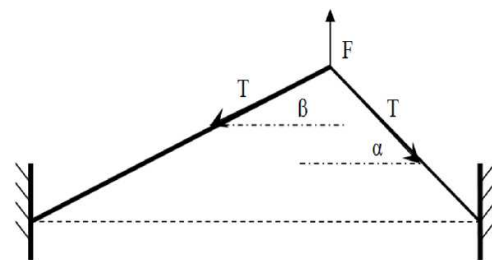
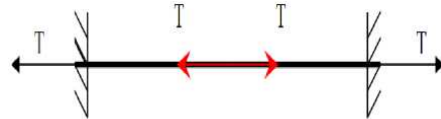


Рис. 23.1.

а ускорение равно u_{tt} , так что мы получаем в соответствии со вторым законом Ньютона, уравнение

$$\rho(x) u_{tt} = T \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x + f(t, x),$$

называемое **нелинейным уравнением струны**. Здесь $\rho(x)$ — линейная плотность струны (т. е. предел отношения массы отрезка $[x, x + \Delta x]$ к длине этого отрезка). В случае малых колебаний это уравнение линеаризуют, получая

$$\rho(x) u_{tt} = T u_{xx} + f(t, x).$$

Если $\rho(x) \equiv \text{const}$, то струну называют **однородной**, а в противном случае — **неоднородной**. Для однородной струны уравнение обычно делят на ρ , приводя его к виду

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x).$$

Это уравнение мы и будем изучать далее как уравнение колебаний струны. Если $f(t, x) = 0$, то колебания называют **свободными**, а в противном случае — **вынужденными**.

Уравнение свободных колебаний мы решать умеем:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u,$$

$$u = f(x - at) + g(x + at).$$

Посмотрим, что представляет собой функция $u = f(x - at)$. При $t = 0$ она совпадает с $f(x)$. При $t = 1$ это та же картинка, только сдвинутая на a вправо.

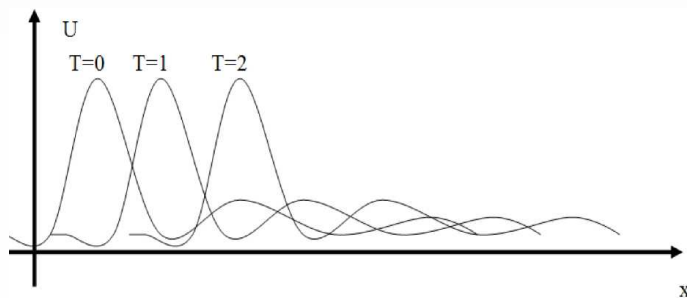
Теорема 23.1. *Общее классическое решение уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

называемое волновым уравнением, имеет вид

$$u = f(x - at) + g(x + at),$$

где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции. Это решение называют **формулой бегущей волны**.



Поскольку уравнение струны — это второй закон Ньютона, т. е. уравнение динамики, и поскольку мы привыкли, что динамика конкретного движения определяется начальными условиями (положением и скоростью) элементов механической системы, естественно и для уравнения струны потребовать эти значения: $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Теорема 23.2. *Решение задачи Коши для уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

где φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, ψ — один раз непрерывно дифференцируемая функция, имеет вид:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds,$$

которое получило названия **решение Д'Аламбера**.

Доказательство. Подставляя условия в формулу бегущей волны, получаем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

из которой определяется

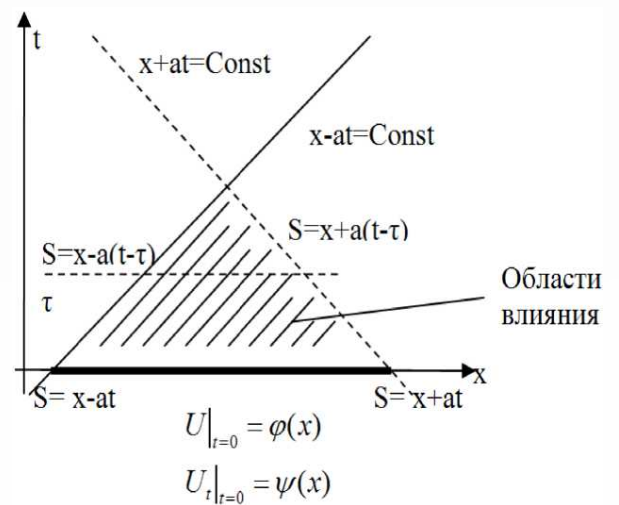
$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds + C,$$

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds - C.$$

В итоге получаем искомую формулу для решения волнового уравнения. ■

Полученная формула имеет красивую геометрическую интерпретацию. Если $\psi(x) = 0$ (т. е. струна в начальный момент выведена из равновесия, но покоится), то при $t > 0$ ее начальная форма $\varphi(x)$ как бы делится пополам: половина идет направо, половина — налево.

Еще одна картинка оказывается полезной при изучении волнового уравнения: если на плоскости (t, x) отметить некоторую точку и провести через нее прямые $x - at = const$, и $x + at = const$, то эти прямые пересекут ось абсцисс в точках $S_1 = x - at$ и $S_2 = x + at$, т. е. в тех точках, в которых вычисляются значения начального положения $\varphi(s)$ и которые ограничивают промежуток интегрирования начальной скорости $\psi(s)$. Из формулы следует,



никакого влияния на значение решения в точке (t, x) . По этой причине область между прямыми

$$\begin{cases} x - at = \text{const}, \\ x + at = \text{const}, \end{cases}$$

проведенными через (t, x) называется **областью влияния**.

23.2. Принцип Дюамеля

Перейдем теперь к изучению неоднородного уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x)$.

Для того, чтобы получить формулу решения, воспользуемся идеями, тесно связанными с законами динамики. В динамике различают два типа воздействий: постоянно действующая сила и удар. При постоянно действующей силе тело меняет свою траекторию движения постепенно. При ударе траектория меняется мгновенно. Связь между постоянной силой и ударом состоит в интерпретировании удара как постоянной силы, очень большой по величине, но действующей очень малый промежуток времени. С другой стороны, постоянная сила интерпретируется как последовательность частых слабых ударов.

Что дает нам такая интерпретация? Рассмотрим покоящуюся струну и ударим по ней. Что произойдет? Конечно, струна мгновенно свою форму не изменит, ее положение останется прежним. Но струна приобретет начальную скорость, и именно поэтому начнет двигаться.

Если удар совершен при $t = 0$, то формула решения будет иметь вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

Если в момент времени $t = \tau$, то

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \psi(s) ds.$$

Собственно **принцип Дюамеля** состоит в том, что формулу решения неоднородного уравнения можно получить интегрированием по $[0, t]$ формулы для решения однородного уравнения с начальной скоростью $\psi_\tau(s)$ при $t = \tau$ с заменой $\psi_\tau(s)$ на $f(\tau, s)$ (т. е. последовательности ударов на постоянно действующую силу). Это дает формулу:

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, s) ds d\tau.$$

Теорема 23.3. *Решение уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x,)$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям, определяется формулой

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, s) ds d\tau.$$

Решение является классическим, если функция f — непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Сама по себе формула ничего не доказывает. Для того, чтобы убедиться в ее справедливости надо по-честному продифференцировать:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2a} \int_x^x f(t, s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (f(\tau, x + a(t - \tau)) + f(\tau, x - a(t - \tau))) d\tau, \\ u_{tt} &= \frac{1}{2} (f(t, x) + f(t, x)) + \frac{a}{2} \int_0^t (f_x(\tau, x + a(t - \tau)) - f_x(\tau, x - a(t - \tau))) d\tau, \\ u_x &= \frac{1}{2a} \int_0^t (f(\tau, x + a(t - \tau)) - f(\tau, x - a(t - \tau))) d\tau, \\ u_{xx} &= \frac{1}{2a} \int_0^t (f_x(\tau, x + a(t - \tau)) - f_x(\tau, x - a(t - \tau))) d\tau. \end{aligned}$$

Как мы видим, действительно $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x)$, так что наша формула дает решение неоднородного уравнения. ■

23.3. Отражение волн

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

До сих пор мы его рассматривали при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Однако для настоящей струны это не вполне правильно, т. к. она всегда конечна, и занимает не всю прямую, а только отрезок длины l ($x \in [0, l]$). На концах отрезка мы имеем условия закрепления $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Как они влияют на решение? Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим промежуточную ситуацию, когда уравнение задано на полуоси $x \in [0, \infty)$, а при $x = 0$ задано условие $u(t, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x), \\ u|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$u(t, x) = f(x - at) + g(x + at).$$

И подстановка его в начальные условия дает систему уравнений

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

из которой следует

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds,$$

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds,$$

для $x \geq 0$. Главное отличие от случая задачи на всей оси состоит в том, что и уравнения, и их решения определены только лишь при $x > 0$. В то же время ясно, что для формулы $f(x - at)$ аргумент может при $t > 0$ принимать как положительные, так и отрицательные значения, а в формуле $g(x + at)$ это может быть только при $t < 0$. Значит, функции $f(s)$ и $g(s)$ должны быть определены при всех значениях аргумента. Откуда взять значения аргумента при $s < 0$? Оказывается, именно тут играют роль краевые условия. Подстановка в эти условия функции дает равенство

$$f(-at) + g(at) = 0,$$

и если мы делаем замену $s = at$, то получим

$$f(-s) + g(s) = 0,$$

т. е. $g(s)$ при отрицательных значениях s выражается через значения f при положительных значениях аргумента. Наоборот, если сделать замену $s = -at$, то получим: т.е. $f(s)$ при отрицательных значениях s выражается через значения g при положительных значениях аргумента:

$$f(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x -\psi(-s) ds,$$

$$g(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x -\psi(-s) ds.$$

Не трудно заметить, что полученные выражения почти не отличаются от формул при $x \geq 0$. Это дает возможность доказать следующую теорему.

Теорема 23.4. *Решение задачи Коши*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0$$

$$|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u_t |_{t=0} = \psi(x),$$

$$u |_{x=0} = 0,$$

задается формулой Д'Аламбера, в которой начальные условия продолжены на отрицательную полуось нечетным образом:

$$u(t, x) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(s) ds,$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x \leq 0, \end{cases}$$

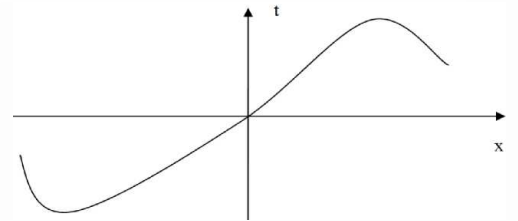
$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x \leq 0, \end{cases}$$

Решение является классическим, если функция φ — дважды, а ψ — один раз непрерывно дифференцируема, и выполнены условия $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = 0$.

Доказательство. В заданной обозначении

$$f(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \tilde{\psi}(s) ds,$$

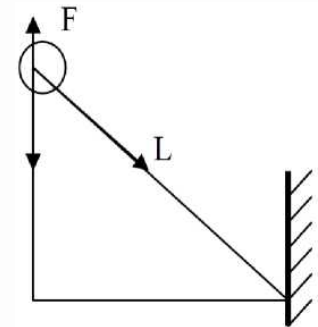
$$g(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \tilde{\psi}(s) ds,$$



уже при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. И в итоге мы получаем искомую формулу. ■

23.4. Условие свободного конца

Струна может быть закреплена не только жестко, но и мягко, свободно. Физически это выглядит так: струна привязывается к кольцу, которое надевается на спицу, так что этот конец струны может скользить по спице вверх-вниз. Какое условие описывает такой тип закрепления? Для того чтоб понять это вспомним вывод уравнения струны. Основное уравнение — уравнение баланса сил натяжения и внешней силы. В случае свободного закрепления мы имеем совершенно аналогичную ситуацию, только сила натяжения у нас тут одна.



Таким образом, уравнение равновесия имеет вид:

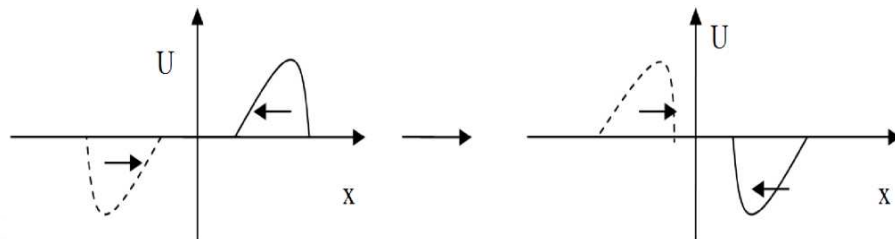
$$Tu_{xx} + F = 0.$$

В случае, когда внешней силы нет, мы получаем условие, которое обычно и называют условием свободного конца: $u_x|_{x=0} = 0$. Это дает формулу

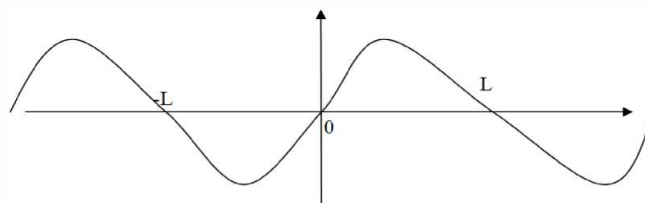
$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, & x > at, \\ \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi(-s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^{at+x} \psi(s) ds, & 0 < x < at. \end{cases}$$

Условие продолжения начальных условий на $x < 0$ позволяет объяснить явление, хорошо известное в физике: *отражение волн от закрепленного или свободного конца*. Оно состоит в том, что волна, идущая по струне в сторону конца, через некоторое время достигает

его и возвращается назад, но только «вверх тормашками» и «задом наперед». Принцип продолжения начальных условий позволяет увидеть это явление как эффект обмена волнами области реальной ($x > 0$) и воображаемой ($x < 0$). В случае, когда мы рассматривали



уравнение на отрезке $[0, l]$ (с условиями закрепления $u(t, 0) = u(t, l) = 0$), можно точно также использовать формулу Д'Аламбера. На отрезок $[-l, 0]$ надо продолжить начальные условия нечетным образом. Но что будет за точкой l ? Оказывается точно также — ведь точка $x = l$ ничем не хуже точки $x = 0$. Такое продолжение нечетное не только относительно $x = 0$, но и относительно $x = l$ (что формально записывается формулой $\varphi(2l - x) = -\varphi(x)$), оказывается $2l$ -периодическим.



23.5. Условия согласования

Теорема 23.5. *Решение смешанной Коши*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, l], \\ u|_{t=0} &= \varphi(x) \in C^2((0, l)), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x) \in C^1((0, l)), \\ u|_{x=0} &= \nu(t) \in C^2([0, \infty)), \\ u|_{x=l} &= \mu(t) \in C^2([0, \infty)). \end{aligned}$$

задается формулой Д'Аламбера:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds,$$

и является классическим, если выполнены условия согласования

$$\begin{cases} \nu(0) = \varphi(0), \\ \nu'(0) = \psi(0), \\ \nu''(0) = a^2 \varphi''(0). \end{cases} \quad \begin{cases} \mu(0) = \varphi(l), \\ \mu'(0) = \psi(l), \\ \mu''(0) = a^2 \varphi''(l). \end{cases}$$

Доказательство. Мы рассматриваем случай, в котором ненулевыми являются не только начальные, но и граничные условия. И потому такие задачи называют *смешанными*.

До сих пор мы не обсуждали вопрос, нужны ли какие-то ограничения на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$? Оказывается, что такие ограничения есть, и они имеют вполне естественный характер, так с одной стороны $u(0,0) = \nu(0)$, а с другой $\varphi(0) = u(0,0)$, значит $\nu(0) = \varphi(0)$, иначе получается абсурд (если $u(t,x)$ — непрерывна). Для того, чтобы выписать все условия, необходимо систематически перечислить все выражения производных от начальных и граничных условий через производные решения:

$$\begin{cases} \varphi(0) = u(0,0), \\ \varphi'(0) = u_x(0,0), \\ \varphi''(0) = u_{xx}(0,0), \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(0) = u_t(0,0), \\ \psi'(0) = u_{tt}(0,0), \end{cases} \quad \begin{cases} \nu(0) = u(0,0), \\ \nu'(0) = u_t(0,0), \\ \nu''(0) = u_{tt}(0,0). \end{cases}$$

Это дает нам три условия:

$$\begin{cases} \nu(0) = \varphi(0), \\ \nu'(0) = \psi(0), \\ \nu''(0) = a^2 \varphi''(0). \end{cases}$$

(последнее в силу уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$). Аналогично на правом конце получаем условие согласованности.

$$\begin{cases} \mu(0) = \varphi(l), \\ \mu'(0) = \psi(l), \\ \mu''(0) = a^2 \varphi''(l). \end{cases}$$

■

★Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad x \geq 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \\ u_t|_{t=0} &= 1, \\ u|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не выполняется условие $\nu'(0) = \psi(0)$. Несмотря на то, что условия согласования не выполнены, мы можем формально рассмотреть функцию, определяемую формулой Д'Аламбера.

$$u(t, x) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(s) ds.$$

Что дает решение

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} (x+at - x-at) = t, & x > at, \\ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 (-a) ds + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} (-1) ds = \frac{x}{a}, & -at < x < at, \\ \frac{1}{2a} (x-at - x-at) = -t, & x < -at. \end{cases}$$

Эта функция, несмотря на то, что не является гладкой, на самом деле также должна рассматриваться как решение поскольку возникает в целом ряде классических задач (например в геофизике). С точки зрения математической эти решения считаются *обобщенными*. Как видно мы снова возвращаемся к проблеме обобщения понятия решения, пригодного для негладких и даже разрывных функций. ★

